

Piotr MARCHEL, Józef PASKA
Politechnika Warszawska

MODELOWANIE DOSTĘPNOŚCI ENERGII PIERWOTNEJ DLA ELEKTROWNI SŁONECZNYCH W POLSCE

Odnawialne źródła energii mają coraz większy udział w europejskim i krajowym bilansie energetycznym. Wynika to z wprowadzonej przez dyrektywę europejską oraz potwierdzonej przez polską politykę energetyczną konieczności uzyskania 15% wytwarzanej energii elektrycznej ze źródeł odnawialnych. Obecnie większość tej energii jest produkowana w elektrowniach wiatrowych, natomiast zakłada się wzrost udziału również elektrowni biomasowych, biogazowych czy fotowoltaicznych.

Z punktu widzenia niezawodności systemów elektroenergetycznych istotne jest, że produkcja energii elektrycznej w elektrowniach wykorzystujących energię wiatru czy Słońca jest ograniczona dostępnością energii pierwotnej. Zatem niezawodność elektrowni wiatrowych lub fotowoltaicznych zależy nie tylko od ich struktury technologicznej i połączenia z siecią, do której dostarczają energię, ale również od warunków geoklimatycznych. Dlatego dla modelowania pracy i niezawodności elektrowni słonecznych szczególnie istotne jest modelowanie dostępności energii pierwotnej, czyli gęstości strumienia promieniowania słonecznego, które dociera do powierzchni Ziemi.

W pracy tej została podjęta próba opisu charakteru i zmienności natężenia promieniowania słonecznego w kraju. Opracowany został również prosty model dostępności promieniowania słonecznego dla kilku wybranych stacji meteorologicznych w Polsce.

1. Analiza dostępności promieniowania słonecznego

Dostępność energii pierwotnej dla elektrowni słonecznych, czyli promieniowania słonecznego, ma dwoisty charakter. Istnieje wyraźna cykliczność zarówno dobową, jak i roczną. Jednocześnie ilość promieniowania, które dociera do powierzchni Ziemi zależy również od stopnia, w jakim chmury i zanieczyszczenie atmosfery ograniczają dostęp tej energii. Tę zmienność należy rozpatrywać jako realizację pewnego procesu stochastycznego. Dlatego należy oddzielić w natężeniu promieniowania słonecznego składnik deterministyczny, związany z dostępnością energii promieniowania Słońca na zewnętrznej granicy atmosfery, w konkretnej znanej lokalizacji oraz składnik losowy związany z ograniczeniem promieniowania przez atmosferę. Dokładny sposób oddzielenia obu

tych składników został przedstawiony w [1]. Gęstość strumienia promieniowania docierającego do powierzchni Ziemi G_z można wyznaczyć z następującej zależności:

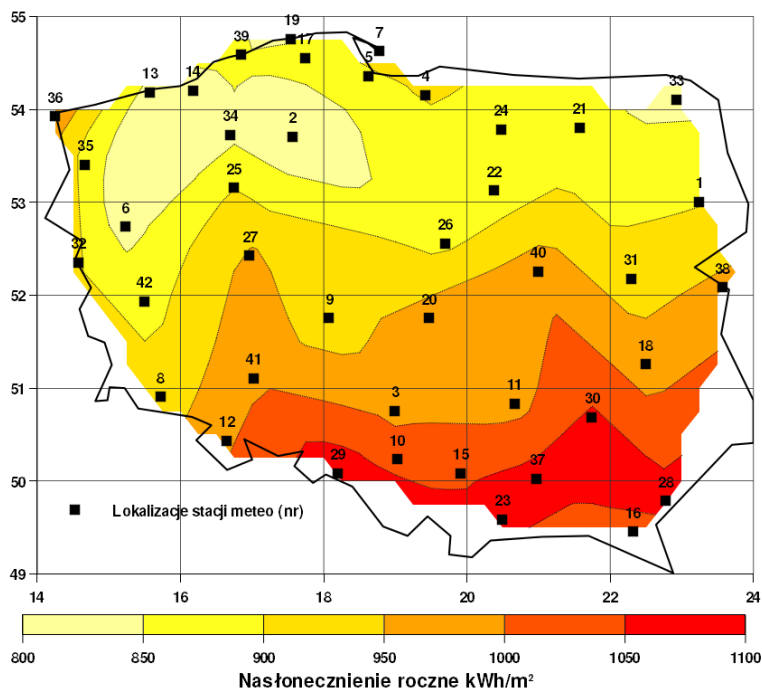
$$G_z = k_b \cdot G_p, \quad (1)$$

gdzie: G_p jest gęstością strumienia promieniowania docierającego do górnych warstw atmosfery w płaszczyźnie równoległej do powierzchni Ziemi (w W/m^2), zaś k_b jest wskaźnikiem bezchmurności.

Wskaźnik bezchmurności jest silnie powiązany z zachmurzeniem. Może przybierać wartości od 0, gdy całe promieniowanie słoneczne zostaje odbite lub pochłonięte przez atmosferę, do 1, gdy atmosfera nie ogranicza dostępu promieni słonecznych do Ziemi.

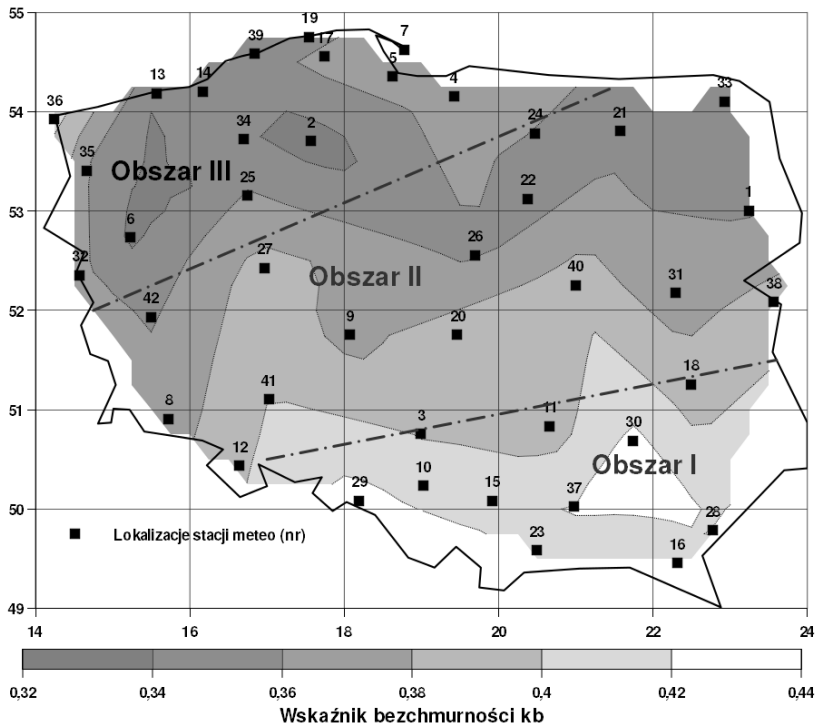
2. Analiza wskaźnika bezchmurności w Polsce

W niniejszej pracy została podjęta próba określenia, jak kształtuje się zmienność wskaźnika bezchmurności w kraju. Analiza ta została przeprowadzona na podstawie statystycznych danych klimatycznych, udostępnianych przez Ministerstwo Infrastruktury i Rozwoju do celów obliczeń energetycznych budynków [6].



Rys. 1. Wyznaczone roczne wartości nasłonecznienia w Polsce

Wykonano obliczenia dla 42 stacji meteorologicznych w Polsce. Korzystając z zależności przedstawionych w [1] dla każdej z 8760 godzin w roku zostały obliczone gęstości strumienia promieniowania docierającego do górnych warstw atmosfery w płaszczyźnie równoległej do powierzchni Ziemi G_p . Badany wskaźnik bezchmurności k_b był wyznaczany dla godzin od świtu do zmierzchu na podstawie przekształconej zależności (1), jako iloraz gęstości strumienia promieniowania dochodzącego do górnych warstw atmosfery G_p oraz gęstości strumienia docierającego do powierzchni Ziemi G_Z . Wyniki analizy statystycznej wskaźnika bezchmurności dla 42 stacji meteorologicznych zostały przedstawione w tabeli 1. Na ich podstawie zostały utworzone mapy: rocznego nasłonecznienia w Polsce (rys. 1), średniej wartości wskaźnika bezchmurności $k_{b\bar{s}r}$ (rys. 2) oraz odchylenia standardowego tego wskaźnika σk_b (rys. 3).



Rys. 2. Średnie wartości wskaźnika bezchmurności $k_{b\bar{s}r}$ w Polsce oraz proponowany podział na obszary o różnych warunkach nasłonecznienia

Uzyskane wyniki wskazują, że celowy jest podział Polski na obszary o nieco odmiennych warunkach nasłonecznienia. Można wydzielić 3 takie obszary (rys. 2): I – Polska południowo-wschodnia; II – Polska centralna oraz III – Polska północno-zachodnia.

Tabela 1

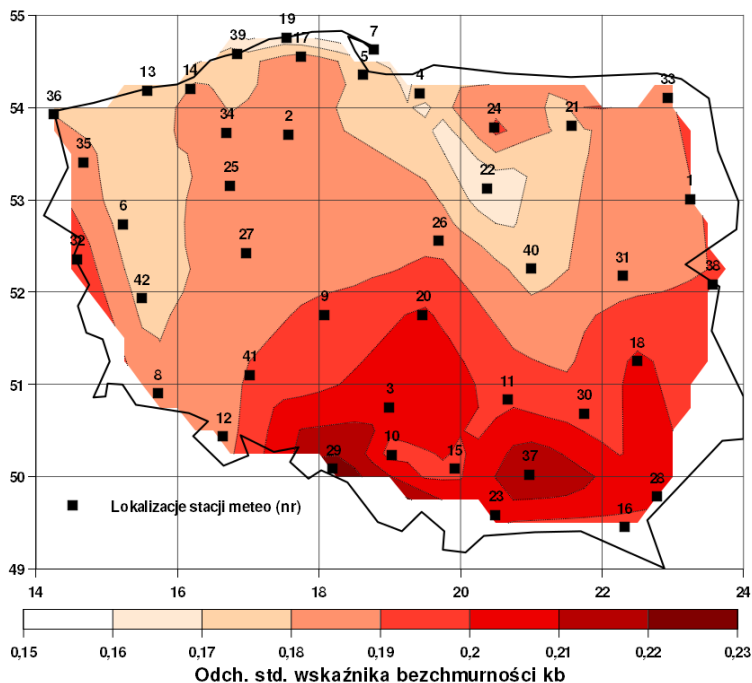
Wyznaczone parametry wskaźnika bezchmurności k_b
dla wybranych stacji meteorologicznych w Polsce

Nr stacji	Nazwa i lokalizacja stacji	E, kWh/m ² a	$k_{b\bar{s}r}$	σk_b	q_{1kb}	q_{2kb}	q_{3kb}	d_p , dni/a	d_s , dni/a	d_z , dni/a
1	Białystok (53,00N, 23,25S)	897	0,358	0,190	0,164	0,345	0,489	118	30	217
2	Chojnice (53,70N, 17,57S)	803	0,331	0,186	0,149	0,323	0,456	118	21	226
3	Częstochowa (50,75N, 19,00S)	990	0,399	0,207	0,168	0,401	0,542	73	87	205
4	Elbląg (54,15N, 19,43S)	900	0,372	0,167	0,268	0,346	0,479	87	26	252
5	Gdańsk (54,35N, 18,63S)	886	0,371	0,178	0,228	0,363	0,491	69	17	279
6	Gorzów W. (52,73N, 15,23S)	830	0,336	0,176	0,158	0,329	0,453	115	32	218
7	Hel (54,62N, 18,78S)	928	0,382	0,166	0,272	0,378	0,490	70	15	280
8	Jelenia Góra (50,90N, 15,73S)	921	0,370	0,182	0,184	0,350	0,483	86	54	225
9	Kalisz (51,75N, 18,08S)	919	0,373	0,192	0,194	0,346	0,485	81	42	242
10	Katowice (50,23N, 19,03S)	1019	0,406	0,195	0,282	0,400	0,527	55	77	233
11	Kielce (50,83N, 20,67S)	981	0,390	0,198	0,189	0,361	0,518	71	66	228
12	Kłódzko (50,43N, 16,65S)	994	0,397	0,186	0,287	0,390	0,516	59	76	230
13	Kołobrzeg (54,18N, 15,58S)	826	0,339	0,172	0,185	0,327	0,441	112	14	239
14	Koszalin (54,20N, 16,18S)	827	0,344	0,182	0,163	0,333	0,465	105	24	236
15	Kraków (50,08N, 19,92S)	1045	0,414	0,199	0,282	0,404	0,545	59	83	223
16	Lesko (49,45N, 22,32S)	1020	0,404	0,194	0,234	0,397	0,537	56	83	226
17	Lębork (54,55N, 17,75S)	870	0,368	0,189	0,182	0,368	0,499	87	35	243
18	Lublin (51,25N, 22,50S)	974	0,389	0,202	0,171	0,364	0,534	88	59	218
19	Leba (54,75N, 17,55S)	847	0,354	0,165	0,214	0,351	0,468	81	16	268
20	Łódź (51,75N, 19,47S)	978	0,392	0,202	0,178	0,386	0,524	85	55	225
21	Mikołajki (53,80N, 21,58S)	850	0,351	0,178	0,178	0,340	0,476	100	19	246
22	Mława (53,12N, 20,38S)	867	0,351	0,161	0,199	0,348	0,452	86	19	260
23	Nowy Sącz (49,58N, 20,50S)	1061	0,419	0,203	0,278	0,417	0,547	53	100	212
24	Olsztyn (53,78N, 20,48S)	883	0,359	0,194	0,161	0,345	0,503	115	29	221
25	Piła (53,15N, 16,75S)	902	0,362	0,183	0,176	0,359	0,489	91	21	253
26	Płock (52,55N, 19,70S)	890	0,357	0,188	0,159	0,344	0,499	97	28	240
27	Poznań (52,42N, 16,97S)	961	0,389	0,184	0,240	0,395	0,507	70	44	251
28	Przemysł (49,78N, 22,78S)	1072	0,422	0,204	0,271	0,430	0,552	56	100	209
29	Racibórz (50,08N, 18,20S)	1086	0,427	0,224	0,172	0,428	0,581	62	115	188
30	Sandomierz (50,68N, 21,75S)	1060	0,425	0,195	0,305	0,426	0,552	41	78	246
31	Siedlce (52,17N, 22,30S)	924	0,370	0,186	0,175	0,356	0,503	85	32	248
32	Słubice (52,35N, 14,58S)	898	0,364	0,196	0,158	0,344	0,503	98	43	224
33	Suwałki (54,10N, 22,93S)	837	0,343	0,189	0,153	0,334	0,476	120	32	213
34	Szczecinek (53,72N, 16,70S)	839	0,342	0,182	0,159	0,334	0,471	110	29	226
35	Szczecin (53,40N, 14,67S)	863	0,358	0,182	0,179	0,344	0,477	93	38	234
36	Świnoujście (53,92N, 14,25S)	984	0,406	0,180	0,290	0,402	0,516	47	39	279
37	Tarnów (50,02N, 20,98S)	1071	0,421	0,221	0,172	0,420	0,577	61	87	217
38	Terespol (52,08N, 23,57S)	962	0,387	0,190	0,197	0,385	0,507	75	47	243
39	Ustka (54,58N, 16,85S)	862	0,354	0,175	0,192	0,346	0,474	93	16	256
40	Warszawa (52,25N, 21,00S)	978	0,390	0,176	0,274	0,393	0,507	66	47	252
41	Wrocław (51,10N, 17,03S)	993	0,400	0,191	0,268	0,390	0,530	67	69	229
42	Zielona Góra (51,93N, 15,50S)	878	0,358	0,176	0,177	0,341	0,474	90	32	243

E – roczne natężenie promieniowania słonecznego; $k_{b\bar{s}r}$ – średnia wartość wskaźnika bezchmurności; σk_b – odchylenie standardowe wskaźnika bezchmurności; q_{1kb} , q_{2kb} , q_{3kb} – pierwszy, drugi (mediana) i trzeci kwartyl wskaźnika bezchmurności; d_p – roczna liczba dni pochmurnych ($k_b < 0,35$), d_s – roczna liczba dni słonecznych ($k_b > 0,35$), d_z – roczna liczba dni ze zmiennym zachmurzeniem.

Największe roczne nasłonecznienie w Polsce występuje na południu: w Małopolsce, na Podkarpaciu i na Górnym Śląsku. Na tych terenach obliczone wartości nasłonecznienia przekraczają 1000 kWh/m². Najniższym nasłonecznieniem charakteryzują się tereny województwa zachodniopomorskiego, gdzie roczne nasłonecznienie jest poniżej 850 kWh/m².

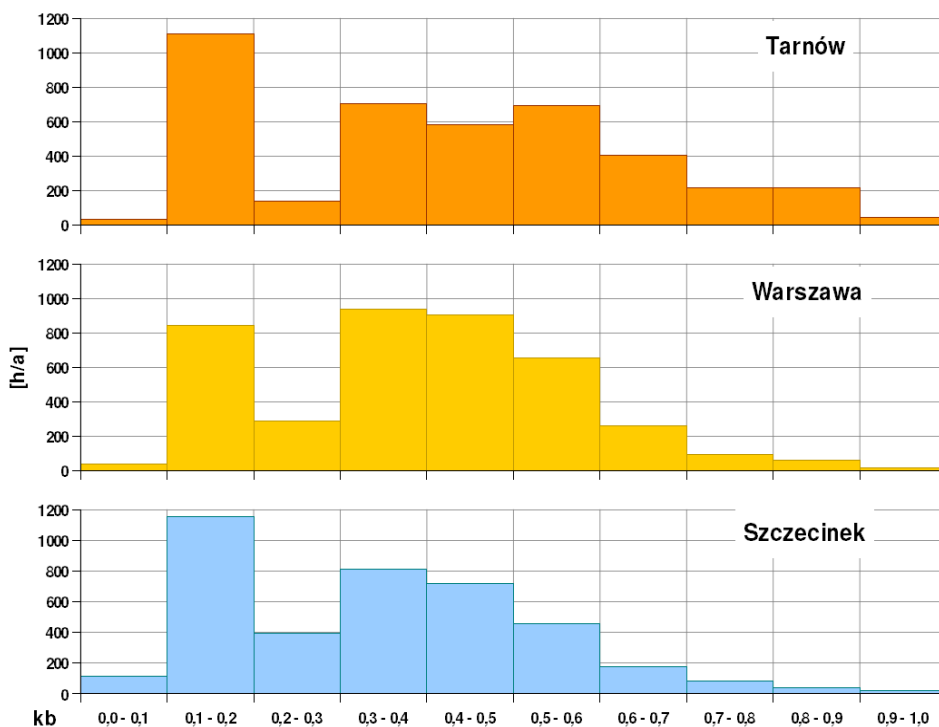
Wartości średnie wskaźnika bezchmurności są silnie związane z rocznym nasłonecznieniem. W południowej Polsce średnia wartość wskaźnika bezchmurności przekracza 0,42; co oznacza że przeciętnie ponad 40% energii promieniowania słonecznego dociera do powierzchni Ziemi. W północno-zachodniej Polsce wskaźnik ten nie przekracza 0,34. Wartości odchylenia standardowego wskaźnika bezchmurności σk_b świadczą o zmienności nasłonecznienia. Okazuje się, że największą zmiennością zachmurzenia charakteryzują się w Polsce tereny bardziej nasłoneczone (w południowo-wschodniej części kraju odchylenie standardowe wskaźnika bezchmurności przekracza 0,2). Dla badanych stacji wyznaczona została również: liczba dni (umownie) pochmurnych d_p , gdy wartość wskaźnika bezchmurności k_b przez cały dzień nie przekraczała 0,35; liczba dni słonecznych d_s , gdy $k_b > 0,35$ oraz liczba dni ze zmiennym zachmurzeniem d_z (tabela 1).



Rys. 3. Odchylenie standardowe wskaźnika bezchmurności σk_b w Polsce

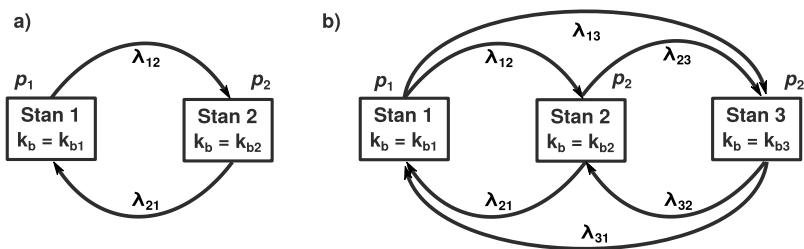
3. Model dostępności energii promieniowania słonecznego

Dla każdego z trzech proponowanych wcześniej obszarów kraju zostały stworzone modele dostępności energii pierwotnej. Wybrane zostały następujące lokalizacje, jako charakterystyczne dla obszaru: w obszarze I - Tarnów, w obszarze II - Warszawa i w obszarze III - Szczecinek. Na rys. 4 przedstawiono histogramy wartości wskaźnika bezchmurności k_b dla tych miejscowości.



Rys. 4. Histogramy wartości wskaźnika bezchmurności k_b dla stacji meteorologicznych reprezentujących proponowane obszary w Polsce: Tarnowa (obszar I), Warszawy (obszar II) oraz Szczecinka (obszar III)

Do modelowania wskaźnika bezchmurności użyto metody procesów Markowa (rys. 5) [2, 4-5]. W przypadku modelu dwustanowego zostały wyróżnione dwa stany wskaźnika bezchmurności, 1 i 2, dla których przyjmowane wartości wskaźnika wynoszą odpowiednio k_{b1} i k_{b2} . Wyznaczone zostały również intensywności przejść pomiędzy stanami λ_{12} oraz λ_{21} , graniczne prawdopodobieństwa przebywania w poszczególnych stanach odpowiednio: p_1 i p_2 oraz średnie czasy przebywania w danym stanie T_1 i T_2 (tabela 2). Analogiczne parametry zostały obliczone również dla modelu trójstanowego (tabela 3).



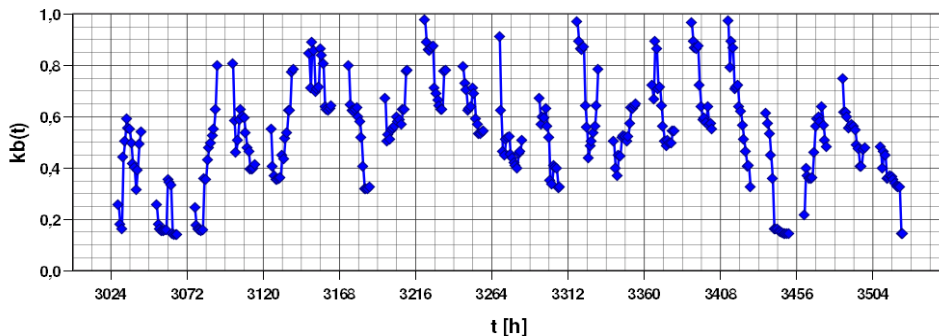
Rys. 5. Schematy łańcuchów Markowa użytych do modelowania wskaźnika bezchmurności k_b . a – model dwustanowy, b – model trójstanowy

Algorytm wyznaczania parametrów modeli był następujący. Na podstawie danych meteorologicznych [6] został obliczony ciąg wartości wskaźnika bezchmurności:

$$k_b(t) = G_p(t) / G_Z(t), \tag{2}$$

gdzie: $t = 1, 2, \dots, n$ – zbiór chwil, w równych odstępach czasowych, dla których zostały wykonane pomiary natężenia promieniowania słonecznego; n – liczba pomiarów (dla 1 roku i danych godzinnych $n = 8760$); $G_p(t)$ – zmierzona wartość natężenia promieniowania słonecznego w chwili t (w W/m^2), $G_Z(t)$ – wyznaczona teoretycznie (na podstawie zależności podanych w [1]) gęstość strumienia promieniowania słonecznego docierającego w chwili t do górnych warstw atmosfery (w W/m^2).

$G_Z(t)$ jest nieokreślone dla godzin nocnych. Przykład wyznaczonego ciągu wartości wskaźnika bezchmurności przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Wyznaczony ciąg wartości wskaźnika bezchmurności $k_b(t)$ dla wybranych godzin, dla stacji Tarnów

Kolejny etap stanowi przydzielenie poszczególnych wyrazów wyznaczonego ciągu do klas odpowiadających kolejnym stanom. Przyjęto, że w przypadku modelu dwustanowego wartości mniejsze niż 0,35 odpowiadają stanowi 1, zaś większe należą do drugiej klasy, odpowiadającej stanowi 2. W przypadku modelu trójstanowego do pierwszej klasy zaliczają się wartości z przedziału

$<0; 0,35$), do drugiej klasy $<0,35; 0,6$), zaś trzecią stanowią te wartości, gdzie $k_b(t) \geq 0,6$. Następnie wyznaczono częstości oraz intensywności przejść pomiędzy poszczególnymi stanami λ_{ij} .

$$\lambda_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sum_{k=1}^N f_{ik}}, \quad (3)$$

gdzie: N – liczba stanów, λ_{ij} – intensywność przejść ze stanu i do j , f_{ij} – częstość przejść ze stanu i do stanu j w ciągu wyznaczonych wartości wskaźnika $k_b(t)$.

Prawdopodobieństwa graniczne (stacjonarne) przebywania w stanie i wyznaczano korzystając z zależności [4-5]:

$$\mathbf{0} = \mathbf{\Pi} \mathbf{\Lambda}, \quad (4)$$

gdzie: $\mathbf{\Pi}$ – wektor kolumnowy granicznych (stacjonarnych) prawdopodobieństw stanów procesu, $\mathbf{\Lambda}$ – macierz intensywności przejść:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=2}^N \lambda_{j1} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^m \lambda_{j2} & \dots & \lambda_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & -\sum_{j=1}^{N-1} \lambda_{jN} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Dla uniknięcia nieoznaczoności układu (4) należy usunąć jedno równanie i zastąpić je warunkiem:

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1. \quad (6)$$

Korzystając z zależności (4)-(6) dla modelu dwustanowego uzyskuje się następujące zależności na prawdopodobieństwa graniczne przebywania w stanie odpowiednio 1 i 2:

$$p_1 = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{12} + \lambda_{21}} \quad \text{oraz} \quad p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} + \lambda_{21}}. \quad (7)$$

Średnie czasy przebywania w stanie i wyznaczono z zależności:

$$T_i = \frac{1}{\lambda_{ii}}. \quad (8)$$

Tabela 2

Wyznaczone parametry modelu dwustanowego dostępności energii pierwotnej

Nr stanu i	k_{bi}	$\lambda_{ij}, 1/h$		T_i, h	p_i
		ze stanu $j=1$	ze stanu $j=2$		
Tarnów (obszar I)					
1	0,13	0,900	0,100	10,00	0,600
2	0,85	0,150	0,850	6,66	0,400
Warszawa (obszar II)					
1	0,16	0,873	0,127	7,90	0,583
2	0,71	0,177	0,823	5,65	0,417
Szczecinek (obszar III)					
1	0,24	0,855	0,145	6,88	0,457
2	0,43	0,123	0,877	8,16	0,543

Tabela 3

Wyznaczone parametry modelu trójstanowego dostępności energii pierwotnej

Nr stanu i	k_{bi}	$\lambda_{ij}, 1/h$			T_i, h	p_i
		$j=1$	$j=2$	$j=3$		
Tarnów (obszar I)						
1	0,20	0,850	0,123	0,028	6,66	0,400
2	0,48	0,144	0,761	0,095	4,18	0,386
3	0,74	0,020	0,202	0,778	4,49	0,214
Warszawa (obszar II)						
1	0,22	0,823	0,154	0,023	5,65	0,417
2	0,46	0,153	0,806	0,041	5,15	0,477
3	0,71	0,007	0,268	0,725	3,64	0,106
Szczecinek (obszar III)						
1	0,20	0,877	0,112	0,011	8,16	0,543
2	0,46	0,175	0,781	0,044	4,56	0,377
3	0,71	0,003	0,277	0,720	3,57	0,080

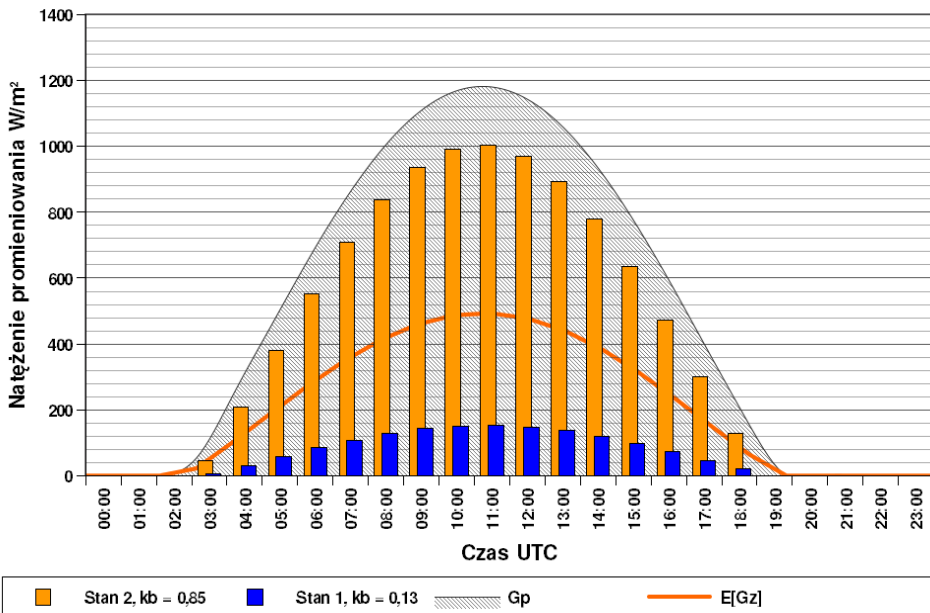
Przeprowadzone analizy pozwalają na modelowanie dostępności energii pierwotnej, a co za tym idzie również zachowania się elektrowni fotowoltaicznej, przy użyciu tylko jednej zmiennej losowej – wskaźnika bezchmurności k_b . Można zastosować analogiczne podejście, jak w przypadku modelowania zmienności prędkości wiatru [3], wykorzystując metodę procesów Markowa. Dysponując takim modelem (dane jak w tabeli 2 lub 3) można wygenerować szereg wartości natężenia promieniowania docierającego do panelu fotowoltaicznego. Algorytm postępowania jest następujący:

1. Wylosuj stan początkowy. Prawdopodobieństwo stanu i jest równe p_i .
2. Na podstawie wylosowanego stanu przyjmij wartość wskaźnika bezchmurności k_b równą k_{bi} .
3. Korzystając z zależności przedstawionych w [1] oblicz gęstość strumienia promieniowania docierającego do górnych warstw atmosfery w płaszczyźnie równoległej do powierzchni Ziemi G_p . Uzyskana wartość gęstości strumienia promieniowania słonecznego w analizowanym

okresie 1 godziny. jest równa iloczynowi obu wyznaczonych wielkości, zgodnie z zależnością (1).

4. Wylosuj kolejny stan. Prawdopodobieństwo przejścia z i -tego stanu do j -tego wynosi λ_{ij} .
5. Powtarzaj kroki od 2 do 4 odpowiednią liczbę razy. Aby uzyskać model natężenia promieniowania słonecznego dla 1 roku, należy powyższe kroki wykonać 8760 razy.

Można również wykorzystać uzyskane modele dostępności energii pierwotnej do modelowania niezawodności elektrowni słonecznych. Można np. utworzyć modele dwu lub trójstanowe, gdzie moc generowana i prawdopodobieństwa będą wynikać z założonych dwóch lub trzech prawdopodobnych poziomów wskaźnika bezchmurności k_b . W godzinach nocnych należy przyjąć moc generowaną równą 0. Można nieco uprościć ten model, przyjmując że o tej samej godzinie tygodnia lub miesiąca prawdopodobieństwa i poziomy mocy generowanej są zbliżone. Należy wówczas wyznaczyć te parametry odrębnie dla każdej godziny w pewnym reprezentatywnym dniu (np. 15 dzień miesiąca). Na rys. 7 przedstawiono przykład modelu dostępności energii promieniowania słonecznego w Tarnowie w dniu 15 czerwca.



Rys. 7. Model dwustanowy dostępności energii pierwotnej (natężenia promieniowania słonecznego) w Tarnowie w dniu 15 czerwca: G_p – natężenie promieniowania docierającego do górnych warstw atmosfery, $E[Gz]$ – wartość oczekiwana natężenia promieniowania słonecznego docierającego do powierzchni Ziemi, k_b – współczynnik bezchmurności

4. Wnioski

Dostępna ilość energii promieniowania słonecznego zależy w danej chwili od znanej ilości energii docierającej do górnych warstw atmosfery oraz przenikalności atmosfery. Przenikalność tę można scharakteryzować za pomocą wskaźnika bezchmurności k_b . W pracy została wykonana analiza statystyczna tego wskaźnika w Polsce, z wykorzystaniem danych zawartych w „typowych latach meteorologicznych” [6] udostępnianych przez Ministerstwo Infrastruktury i Rozwoju. Wartość średnia wskaźnika k_b zawiera się pomiędzy 0,32 a 0,44. Oznacza to, że do powierzchni Ziemi dociera pomiędzy 32% a 44% dostępnej energii promieniowania. Najniższymi wartościami tego wskaźnika charakteryzują się obszary Pomorza Zachodniego. Najwyższe wartości osiąga on w Małopolsce i na Podkarpaciu. Ze względu na różnorodność charakteru dostępu energii promieniowania słonecznego w kraju można wyróżnić trzy obszary charakterystyczne: I – południowa Polska, II – obszar Polski centralnej oraz III – polska północno-zachodnia. Dla tych obszarów przyjęto jako reprezentatywne odpowiednio miasta: Tarnów, Warszawę oraz Szczecinek. W tych miejscowościach wyznaczone zostały parametry modelu dwu- oraz trójstanowego dostępności energii pierwotnej. Wyniki te można wykorzystać do modelowania dostępności energii promieniowania słonecznego w kraju, czy też do analiz niezawodności systemu elektroenergetycznego uwzględniających rozwijającą się energetykę słoneczną.

Literatura

- [1] Marchel P., Paska J.: Modelowanie niezawodności elektrowni fotowoltaicznych. Rynek Energii. Nr 2, 2014.
- [2] Norris J.R.: Markov Chains, Cambridge University Press, 1998.
- [3] Paska J., Marchel P.: Modelowanie niezawodności elektrowni wiatrowych z wykorzystaniem prędkości wiatru dla typowego roku meteorologicznego. Rynek Energii. Nr 1, 2011.
- [4] Paska J.: Niezawodność systemów elektroenergetycznych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa 2005.
- [5] Sheldon M. Ross.: Stochastic Processes. John Wiley & Sons. New York 1996.
- [6] Typowe lata meteorologiczne i statystyczne dane klimatyczne dla obszaru Polski do obliczeń energetycznych budynków ze strony Ministerstwa Infrastruktury i Rozwoju, http://www.mir.gov.pl/budownictwo/rynek_budowlany_i_technika/efektywnosc_energetyczna_budynkow/typowe_lata_meteorologiczne/strony/start.aspx